Задание для группы Н-21

по МДК «ТОНКМсМП»

(22.10.2020)

Тема: «Теоретико-множественный смысл натурального числа и нуля»

Задание выполнить в тетради, результаты сфотографировать (или отсканировать) и отправить на электронную почту до 28.10.2020. Адрес эл.почты: oks.laskina@yandex.ru

Задание:

1) Прочитайте теоретический материал на с.123-127 (темы 45,46,47). Сканы страниц учебника см.ниже.
2) Запишите в тетрадь тему: «Теоретико-множественный смысл натурального числа и нуля».
3) Законспектируйте:
   - Какие числа называются натуральными? (два определения: на с.123, тема 45 и на с.124, тема 46).
   - Определение науки «арифметики».
   - на какой вопрос отвечает количественное натуральное число? на какой вопрос отвечает порядковое натуральное число? (с.126)
   - Определение отрезка натурального ряда (с.125).
   - Определения счёта элементов множества А, числа элементов, количественного натурального числа (с.125)
4) Решите на с.126: №1, №2.
5) Законспектируйте:
   - Для чего служит счёт? (с.126)
   - Чем является количественное натуральное число с теоретико-множественных позиций? (с.127)
   - Сколько натуральных чисел соответствует каждому конечному множеству А? Что соответствует каждому натуральному числу a? Приведите пример для числа 5. (с.127)
   - Теоретико-множественное истолкование числа «нуль»?
6) Решите на с.127: №1, №2.
7) Придумайте три различных множества, соответствующих числу 3; два различных множества соответствующих числу 12.

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 7. ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

45. Об истории возникновения понятий натурального числа и нуля

Числа 1, 2, 3, 4, ... называются **натуральными.**

Понятие натурального числа является одним из основных понятий математики. Возникло оно, как и вся наука математика, из потребностей практической деятельности людей. Складывалось оно постепенно в процессе решения все усложняющихся задач сначала практического, а затем и теоретического характера. Причиной, которая привела человека к созданию натуральных чисел, является необходимость сравнивать различные конечные множества между собой.

В своем развитии понятие натурального числа прошло несколько этапов. В глубокой древности, чтобы сравнить конечные множества, устанавливали взаимно однозначное соответствие между данными множествами или между одним из множеств и подмножеством другого множества, т. е. на этом этапе человек воспринимал численность множества предметов без счета их. Например, о численности группы из пяти предметов он говорил: «Столько же, сколько пальцев на руке»; о множестве из двадцати предметов: «Столько же, сколько пальцев у человека». Такой метод обладал тем недостатком, что сравниваемые множества должны быть одновременно обозримы.

В результате очень долгого периода развития человек пришел к следующему этапу создания натуральных чисел — для сравнения множеств стали применять множества-посредники: мелкие камешки, раковины, пальцы. Эти множества-посредники уже представляли собой зачатки понятия натурального числа, хотя и на этом этапе число не отделялось от сосчитываемых множеств: речь шла о пяти камешках, пяти пальцах, а не о числе вообще. Названия множеств-посредников стали использовать для определения численности множеств, которые с ними сравнивались. Так, у некоторых племен численность множества, состоящего из пяти элементов, обозначалась словом «рука», а численность множества из 20 предметов — словами «весь человек».

Только после того как человек научился оперировать множествами-посредниками, установил то общее, что существует, например, между пятью пальцами и пятью яблоками, т. е. когда произошло отвлечение от природы элементов множеств-посредников, возникло представление о натуральном числе. На этом этапе при счете, например, яблок перечислялись уже не одно яблоко, два яблока и т. д., а проговаривали слова «один», «два», «три» и т. д. Это был важнейший этап в развитии понятия числа. Вот как об этом говорил крупнейший математик современности Н. Н. Лузин: «Мы должны склониться перед гением Человека, создавшего (не открывшего, а именно создавшего) понятие единицы. Возникло Число, а вместе с ним возникла Математика. Идея Числа — вот с чего начиналась история величайшей из наук»[1].

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия. Многие трудности в решении этих проблем были преодолены с созданием в Древней Индии десятичной системы записи чисел и понятия нуля. Постепенно сложилось и представление о бесконечности множества натуральных чисел.

После того как понятие натурального числа сформировалось, числа стали самостоятельными объектами и появилась возможность изучать их как математические объекты. Наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название «арифметика»[2].

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии, Египте. Накопленные в этих странах математические знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции. В средние века большой вклад в развитие арифметики внесли математики Индии, стран арабского мира и Средней Азии, а начиная с XIII века — европейские ученые[3].

Термин «натуральное число» впервые употребил римский ученый А. Боэций (ок. 480—524 гг.).

В настоящее время свойства натуральных чисел, действия над ними изучаются разделом математики, носящим название «теория чисел».

В XIX веке внимание ученых было обращено на построение и логическое обоснование математических теорий натурального числа, т. е. тех теорий, которые лежат в основе вычислений с натуральными числами.

46. Порядковые и количественные натуральные числа. Счет

Как вам известно, натуральными числами называются числа, которые употребляются при счете предметов.

---

[1] Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент.— М., 1979.— С. 12.

[2] Слово «арифметика» происходит от греческого arithmos, что значит «число». Следовательно, арифметика — это наука о числе.

[3] Подробнее о развитии арифметики можно прочитать, например, в книгах: Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин.— М., 1985.— С. 26—29; Депман И. Я. История арифметики.— М., 1965 (и др. издания).

А что представляет собой процесс счета? Как мы, например, должны вести счет элементов множества $A=\{k, l, m, r\}$? Указывая на каждый элемент этого множества, мы говорим: «первый», «второй», «третий», «четвертый». И на этом процесс счета заканчивается, так как использованы все элементы множества A. Ведя счет, мы соблюдаем ряд правил: первым при счете может быть указан любой элемент множества A, но ни один элемент не должен быть пропущен и сосчитан дважды.

Сосчитав элементы множества A, мы говорим, что в множестве A **четыре** элемента, т. е. получаем количественную характеристику этого множества. Но чтобы ее получить, мы использовали **порядковые натуральные числа** «первый», «второй», «третий», «четвертый». Другими словами, мы использовали множество $\{1, 2, 3, 4\}$, которое называют отрезком натурального ряда.

Определение. **Отрезком N_a натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа a.**

Например, отрезок N_4 есть множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4.

Из определения вытекает, что отрезок N_a натурального ряда состоит из всех таких натуральных чисел x, что $x \leqslant a$. Кроме того, любой отрезок N_a при $a > 1$ содержит 1.

Введенное определение отрезка натурального ряда позволяет уточнить понятие счета элементов множества. Но прежде заметим, что в процессе счета элементов множества $A=\{k, l, m, r\}$ каждому элементу этого множества было поставлено единственное число из отрезка N_4, т. е. было установлено взаимно однозначное соответствие между множеством A и отрезком N_4 натурального ряда.

Определение. **Счетом элементов множества A называется установление взаимно однозначного соответствия между множеством A и отрезком натурального ряда N_a.**

Число a называют **числом элементов** в множестве A и пишут: $n(A)=a$. Это число a единственное и является **количественным натуральным числом.**

Таким образом, при пересчете элементы конечного множества A не только расставляются в определенном порядке (при этом используются порядковые натуральные числа, выражаемые числительными «первый», «второй», «третий» и т. д.), но и устанавливается также, сколько элементов содержит множество A (при этом используются количественные натуральные числа, выражаемые числительными «один», «два», «три» и т. д.).

Анализ сущности счета показывает — для того чтобы считать, необходимо заранее иметь достаточный запас чисел, причем числа должны обладать рядом свойств: располагаться в определенном порядке, должно существовать первое число и т. д.

Тесная связь порядкового и количественного числа нашла отражение и в начальном обучении математике. С этими сторонами числа учащиеся знакомятся уже при изучении чисел первого десятка. Происходит это при счете элементов различных множеств. Ответ на вопрос: «Сколько предметов содержит данное множество?» — выражается количественным натуральным числом, а порядковое число указывает, какое место при счете занимает тот или иной предмет, и отвечает на вопрос: «Которым по счету будет данный предмет?»

Упражнения

1. Запишите все элементы множеств N_8, N_{10}. Как называются эти множества?

2. Можно ли назвать отрезком натурального ряда множество: 1) $\{0, 1, 2, 3\}$; 2) $\{1, 3, 5, 7\}$; 3) $\{1, 2, 3\}$; 4) $\{3, 4, 5\}$?

3. Сформулируйте условия, которые необходимо соблюдать, ведя счет элементов конечного множества.

4. Прочитайте предложения: $n(A)=7$, $n(B)=2$. В какой роли здесь выступают натуральные числа 7 и 2? Придумайте множества A и B, удовлетворяющие данным условиям.

47. Теоретико-множественный смысл количественного натурального числа и нуля

В предыдущем пункте было установлено, что счет служит как для упорядочивания элементов конечного множества, так и для определения их количества и что в общем случае порядковое число ведет к количественному.

Смысл количественного числа можно истолковать иначе, с теоретико-множественных позиций, используя понятие равномощности множеств.

Возьмем какое-либо конечное множество A и отберем в один класс все равномощные ему множества. Так, если A — множество вершин треугольника, то в один класс с ним попадут, например, такие множества: множество сторон треугольника, множество букв в слове «мир» и т. д.

Взяв какое-нибудь другое конечное множество B, неравномощное A, отберем все множества, равномощные B. В результате получим новый класс конечных множеств.

Если продолжить этот процесс, то, в силу того, что отношение равномощности есть отношение эквивалентности, все конечные множества окажутся распределенными по классам эквивалентности, причем любые два множества одного класса будут равномощными, а любые два множества различных классов — неравномощными.

Что общего у всех множеств одного и того же класса? Они имеют одинаковую мощность. Это общее свойство всех множеств одного класса эквивалентности и считают натуральным числом. Например, общее свойство множеств, равномощных множеству вершин треугольника, есть натуральное число «три», а общее свойство множеств, равномощных множеству сторон прямоугольника, есть натуральное число «четыре».

Таким образом, с теоретико-множественных позиций **количественное натуральное число есть общее свойство класса конечных равномощных множеств.**

Каждому классу соответствует одно и только одно натуральное число, каждому натуральному числу — один и только один класс равномощных конечных множеств.

Как известно, каждый класс эквивалентности однозначно определяется заданием любого принадлежащего ему элемента — представителя этого класса. Значит, и каждый класс равномощных множеств можно задать, указав его представителя. Например, класс множеств, равномощных множеству вершин треугольника и определяющий натуральное число «три» можно задать, указав множество $A=\{k, l, m\}$. Следовательно, множество A определяет натуральное число «три».

Вообще каждому конечному множеству A соответствует одно и только одно натуральное число $a=n(A)$, но каждому натуральному числу a соответствуют различные равномощные множества одного класса эквивалентности. Поэтому числу «пять» будет соответствовать и множество сторон пятиугольника, и множество его вершин, и множество букв в слове «танец» и др.

Число «нуль» также имеет теоретико-множественное истолкование — оно ставится в соответствие пустому множеству: $0=n(\varnothing)$.

В начальном курсе математики количественное натуральное число рассматривается как общее свойство класса конечных равномощных множеств. Поэтому, когда учащиеся изучают число «один», на странице учебника приводятся изображения одного предмета: одно ведро, одна девочка, один стол и т. д.; когда изучают число «три», на странице учебника приводятся изображения различных совокупностей, содержащих три элемента: три кубика, три камешка, три палочки и т. д. Так происходит при изучении всех чисел первого десятка, но число элементов в множестве определяется путем пересчета. Таким образом, количественное и порядковое натуральное число выступает в начальном обучении в тесной взаимосвязи, в единстве.

Упражнения

1. Приведите примеры таких различных множеств A и B, что $n(A)=n(B)=7$. В каком отношении находятся множества A и B?

2. Каков теоретико-множественный смысл натурального числа «пять»?

3. Рассмотрите иллюстрации и записи, приведенные на той странице учебника по математике для I класса, где учащиеся изучают число «три». Объясните, какие из них приведены с целью раскрыть учащимся порядковое и количественное значение числа «три».